locuste

March 17, 2018

1 Invasione delle cavallette

Vogliamo analizzare numericamente la seguente equazione differenziale

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \tag{1}$$

dove r e k sono parametri. In particolare ci interessa studiare i punti di biforcazione.
Cominciamo ad importare un po' di pacchetti utili

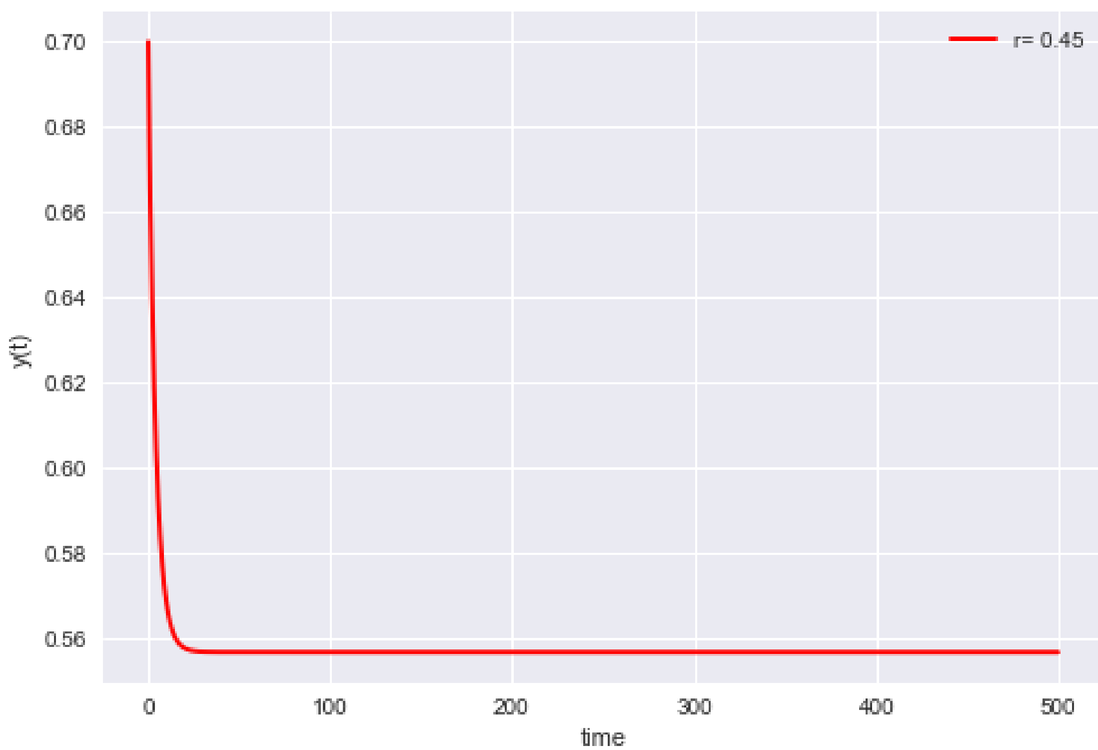
```
In [1]: import numpy as np                                      # libreria matematica
        from scipy.integrate import odeint                      # altra libreria matema
        import matplotlib.pyplot as plt                         # librerie grafiche
        import seaborn
```

Risolvere numericamente un'equazione differenziale e' facilissimo: basta definire il campo vettoriale, il dato iniziale, specificare su che tempi vogliamo risolvere e usare *odeint*

```
In [5]: # function that returns dx/dt
        def model(x,t,r):
            dxdt =  r* x*(1-(x/10)) - (x*x)/(1+x*x)
            return dxdt

        # initial condition
        x0 = 0.7

        # time points
        t = np.linspace(0,500, 10000)


        # parameters
        r1 = 0.45

        # solve ODEs
        y1 = odeint(model,x0,t,args=(r1,))             # risolve con parametro r1
        print('final equilibrium = {0}'.format(y1[-1]))

        # plot results
```

```
plt.plot(t,y1,'r-',linewidth=2,label='r= {}'.format( r1) )
plt.xlabel('time')
plt.ylabel('y(t)')
plt.legend()
plt.show()
```

```
final equilibrium = [ 0.55660845]
```



Adesso vogliamo mostrare i punti di equilibrio del sistema. Come possiamo fare? Ovviamente possiamo trovare gli zeri del campo vettoriale e plottarli. Tuttavia esiste una via alternativa, un filo piu' complicata, ma dinamica. Basta infatti ricordarsi che * punti di equilibrio *stabile*: sono attrattori per la dinamica quando $t \to +\infty$ * punti di equilibrio *instabile*: sono attrattori quando $t \to -\infty$

L'idea allora e' questa: facciamo evolvere il nostro sistema da dati iniziali random. Guardiamo la soluzione dopo molto tempo: sara' andata a cadere su un punto di equilibrio stabile! Rifacendo la stessa cosa indietro del tempo, troviamo i punti di equilibrio instabili.

Cominciamo a generare dati iniziali random, distribuiti uniformemente in un intervallo

```
In [8]: # numeri di punti iniziali
        N = 20

        #intervallo di dati
        x_0_min = -1.0
```

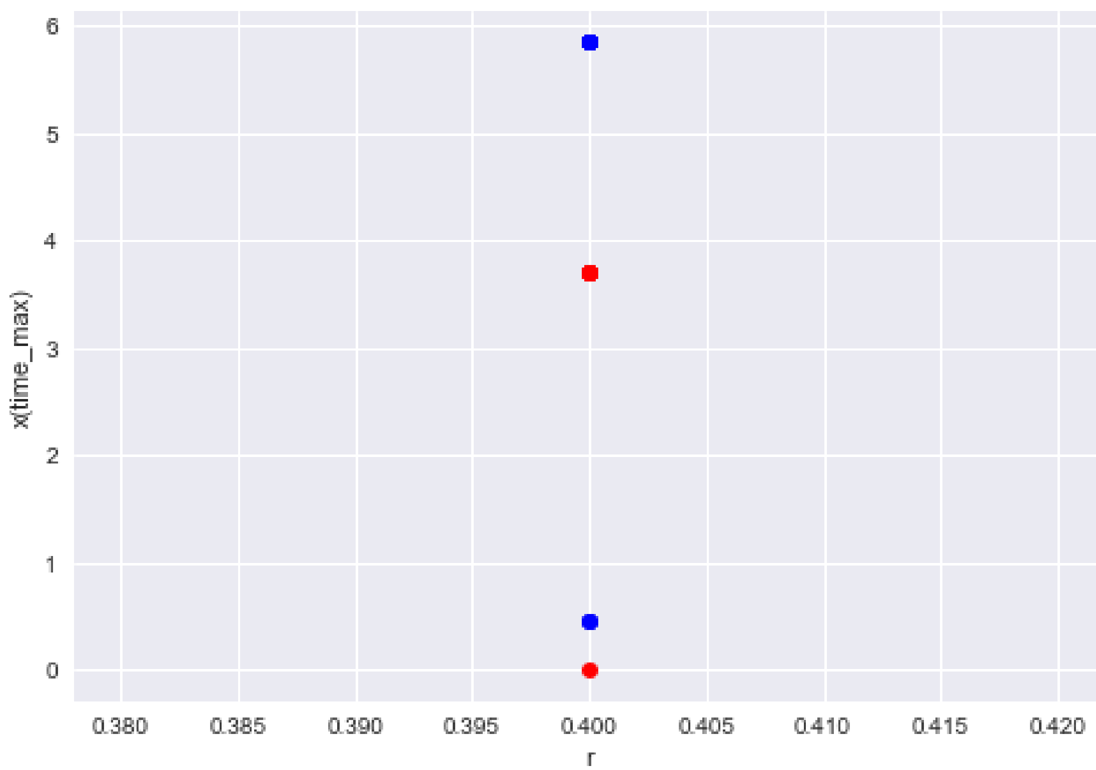
```
x_0_max = 15.0

#tempo massimo
time_max = 500
# time points
t = np.linspace(0,time_max, 50000)


# genero N punti distribuiti random in maniera uniforme fra a e b
x_0 = x_0_min+ (x_0_max-x_0_min)*np.random.random(N)
x_0
```

```
Out[8]: array([ 11.14787761,  11.9628206 ,   6.44396341,   1.15374761,
                 8.33788749,   5.56848506,   9.55868761,   2.94348962,
                10.65439044,   0.89646427,  13.48587915,  10.37099852,
                 3.91556494,  10.24896949,  14.59497721,   5.30114392,
                -0.43029979,  11.18879915,   5.78049053,   8.08974325])
```

A questo punto per ciascun dato iniziale, risolvo l'equazione differenziale avanti del tempo ed indietro nel tempo. Poi plottiamo i valori finali

```
In [10]: # in questo funzione plottiamo i punti di equilibrio stabili ed instabili

         for x0i in x_0:
             #risolvo l'equazione con dato iniziale x0i e parametro r1
             yi= odeint(model,x0i,t ,mxstep=500000, args=(r1,))
             #plotto r ed il valore raggiunto dall'equazione al tempo time_max: so
             plt.plot(r1,yi[-1],'o', color = 'blue' )

             #adesso risolvo indietro nel tempo per trovare i punti instabili: i re
             # quando il tempo va e meno infinito!!
             zi= odeint(model,x0i, -t,mxstep=500000,args=(r1,))
             #plotto r ed il valore raggiunto dall'equazione al tempo time_max: so
             plt.plot(r1,zi[-1],'o', color = 'red' )

         plt.xlabel('r')
         plt.ylabel('x(time_max)')
         plt.show()
```

```
/Users/albertomaspero/anaconda/lib/python2.7/site-packages/ipykernel/__main__.py:3
  app.launch_new_instance()
/Users/albertomaspero/anaconda/lib/python2.7/site-packages/ipykernel/__main__.py:3
  app.launch_new_instance()
```

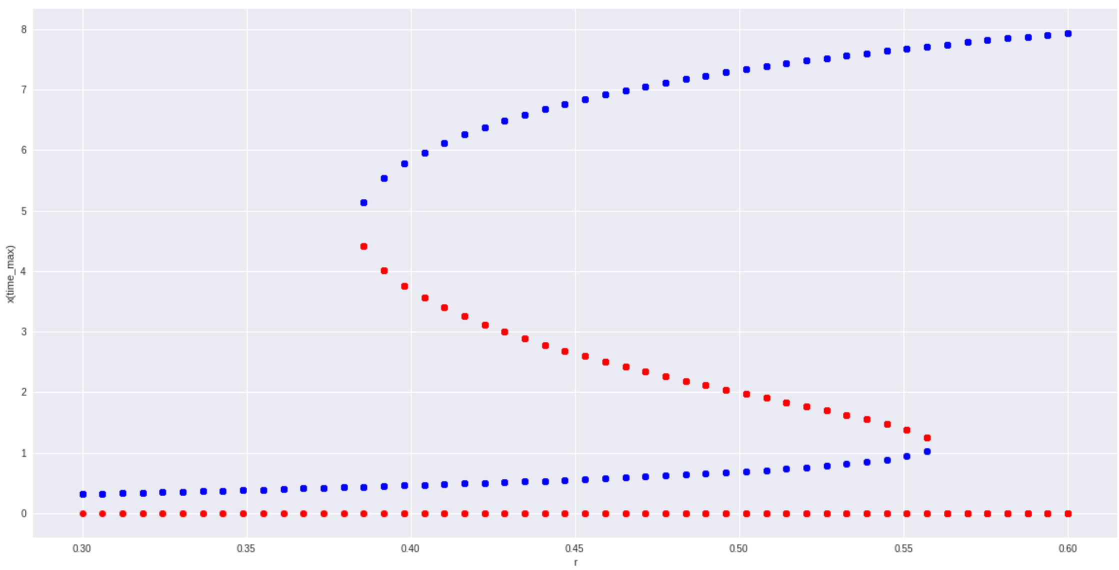


Vogliamo vedere come i punti di equilibrio cambiano in funzione di r

```
In [33]: x_0 = np.array([  6.62057445,  -0.30144453,  14.41076111,   4.6445419 ,
                 14.98940538,   5.49504881,   7.19267983,  10.49342065,
                  3.10442128,  10.3885063 ,  10.00763801,   6.85687199,
                  9.88138589,   0.45014949,   0.62779268,   2.35934398,
                  1.64940631,   2.75896693,   0.32999916,  12.97795719])

         np.seterr(divide='ignore', invalid='ignore')
         plt.figure(figsize=(20,10))

         def punti_equilibrio(x, t, r):
             for ri in r:
                 for x0i in x_0:
                     #risolvo l'equazione con dato iniziale x0i e parametro r1
                     yi= odeint(model,x0i,t, mxstep=500000, args=(ri,))
                     #plotto r ed il valore raggiunto dall'equazione al tempo time_
                     plt.plot(ri,yi[-1],'bo' )

                     #adesso risolvo indietro nel tempo per trovare i punti instab
                     # quando il tempo va e meno infinito!!
                     zi= odeint(model,x0i, -t,mxstep=500000, args=(ri,))
                     #plotto r ed il valore raggiunto dall'equazione al tempo time_
```

```
                    plt.plot(ri,zi[-1],'ro' )

            plt.xlabel('r')
            plt.ylabel('x(time_max)')
            plt.show()


        # definisco il vettore di r che vogliamo testare
        r= np.linspace(0.3, 0.6, 50)

        punti_equilibrio(x_0, t, r)
```

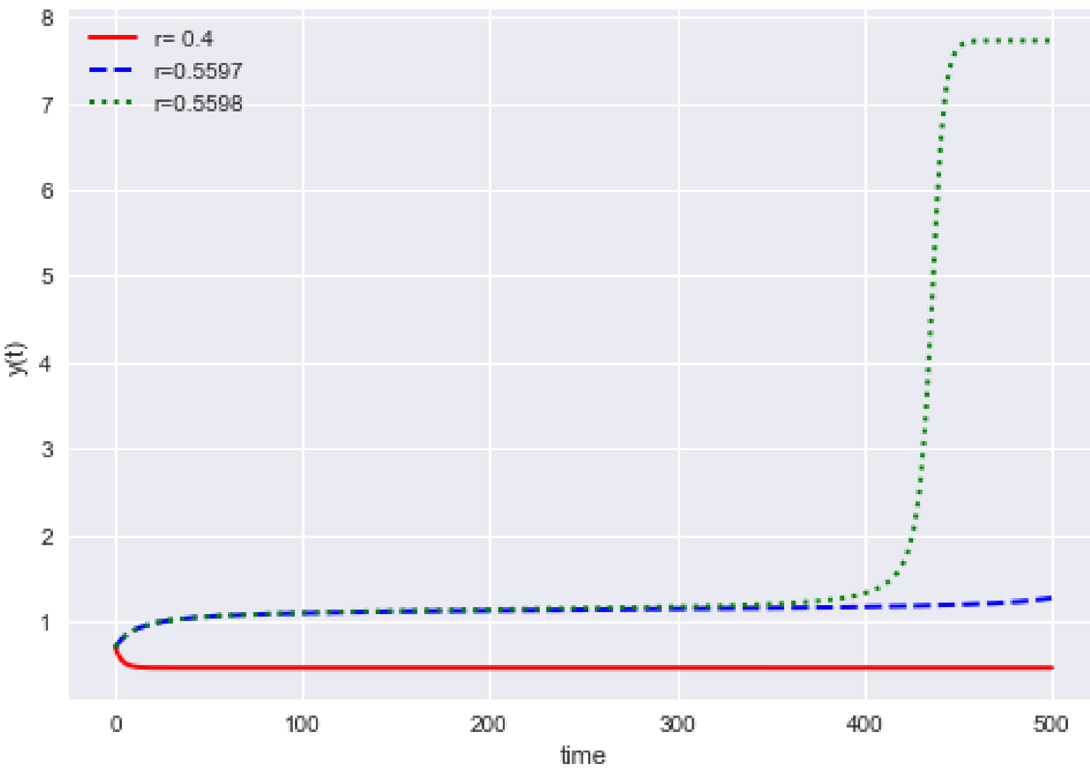
```
/scratch/amaspero/python/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:3: Runti
  This is separate from the ipykernel package so we can avoid doing imports until
```



Vediamo come cambiano le soluzioni vicino ai punti di biforcazione

```
In [22]: # initial condition
         x0 = 0.7

         # time points
         t = np.linspace(0,500, 10000)


         # parameters
         r1 = 0.4
         r2 = 0.5597
         r3 = 0.5598
```

```
# solve ODEs

y1 = odeint(model,x0,t,args=(r1,))
y2 = odeint(model,x0,t,args=(r2,))
y3 = odeint(model,x0,t,args=(r3,))

# plot results
plt.plot(t,y1,'r-',linewidth=2,label='r= {}'.format( r1) )
plt.plot(t,y2,'b--',linewidth=2,label='r={}'.format(r2))
plt.plot(t,y3,'g:',linewidth=2,label='r={}'.format(r3))
plt.xlabel('time')
plt.ylabel('y(t)')
plt.legend()
plt.show()
```




```
In [ ]:
```